



Анализ стратегий обучения FBRINN

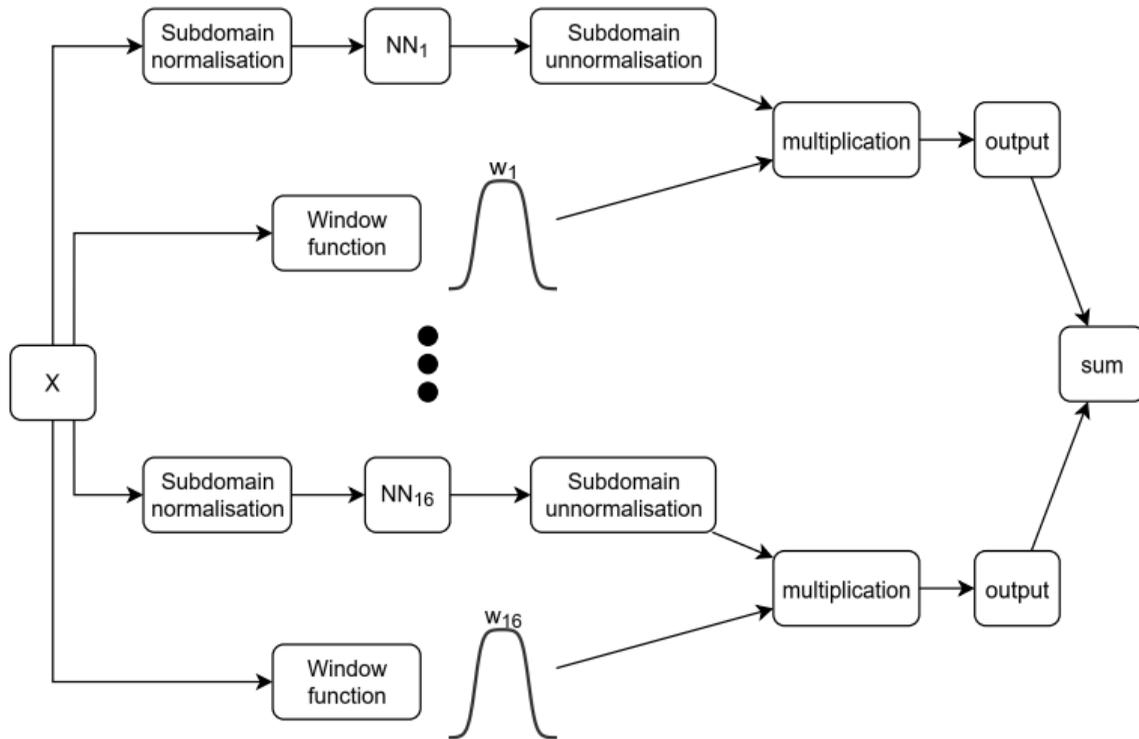
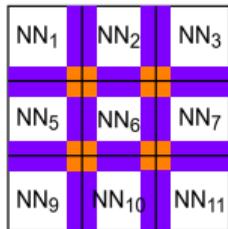
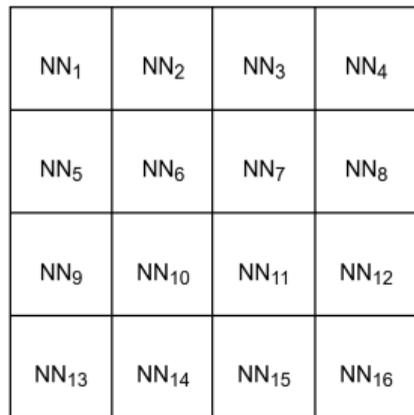
Павел Геннадьевич Алимов
к.ф.-м.н. В.И. Гориховский

Санкт-Петербургский государственный университет

04 июля 2025г.

- Методы аппроксимации ДУ
 - ▶ Обычные НС: требуют данных → слабая предсказательная сила
 - ▶ PINN [Raissi et al. 2017, 2019]: уравнение как loss → не требуют данных
 - ▶ FBPINN [Moseley et al. 2022, 2024]: декомпозиция области
- Проблемы PINN
 - ▶ Сложность обучения
 - ▶ Медленное схождение на границах
 - ▶ Большие топологии сетей
- Преимущество FBPINN
 - ▶ Идейная близость к МКЭ
 - ▶ Отсутствие мелкой сетки

Описание FBPINN



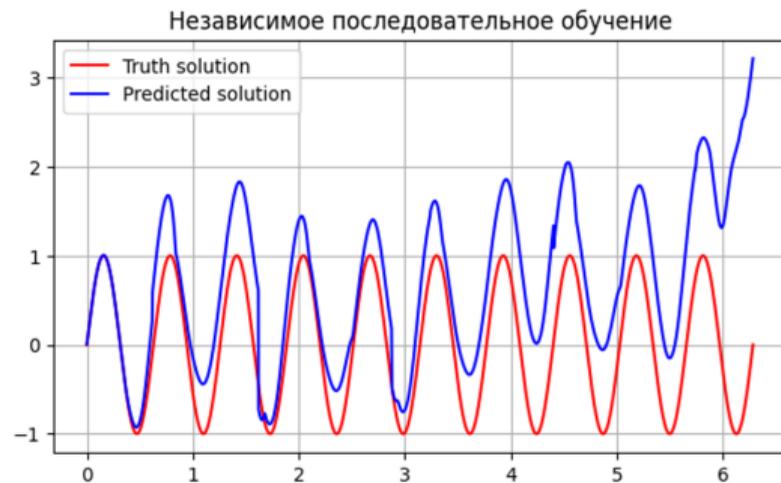
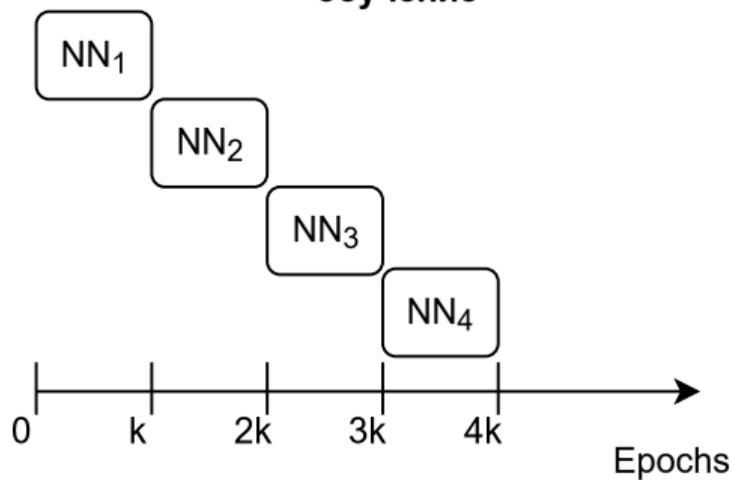
- Отсутствие легкоиспользуемой реализации
 - ▶ Оригинальный код¹
 - ▶ Код от авторов бенчмарка PINNacle²
 - ▶ Лабораторные работы
- Нет описания способов обучения подмоделей
- Чувствительность к граничным условиям
- Сложность подбора декомпозиции

¹<https://github.com/benmoseley/FBPINNs>

²<https://github.com/i207M/PINNacle>

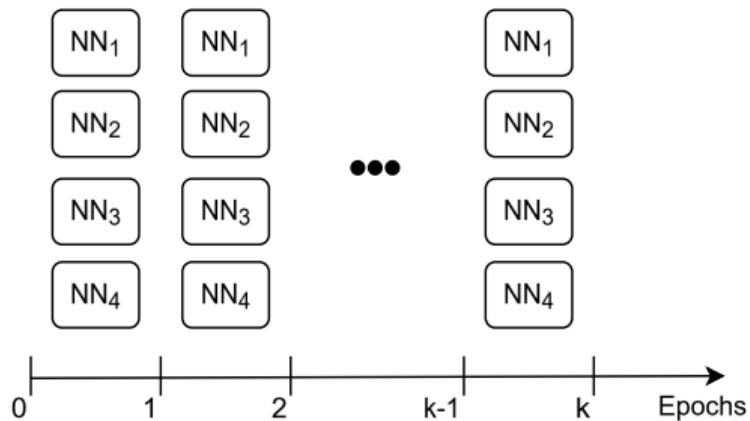
Независимое последовательное обучение

Независимое последовательное обучение

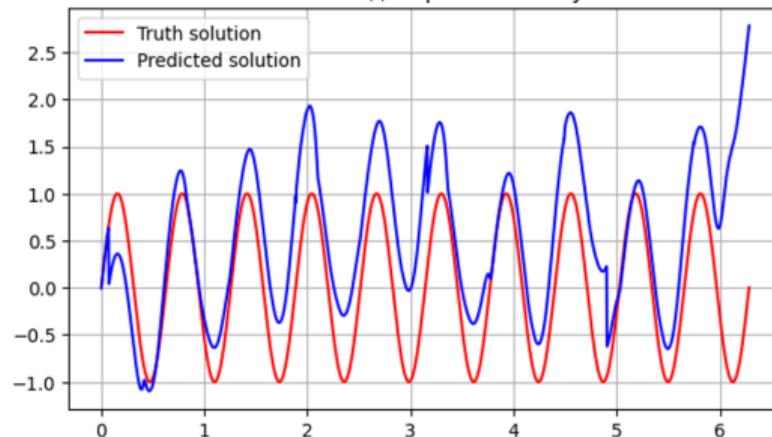


Независимое одновременное обучение

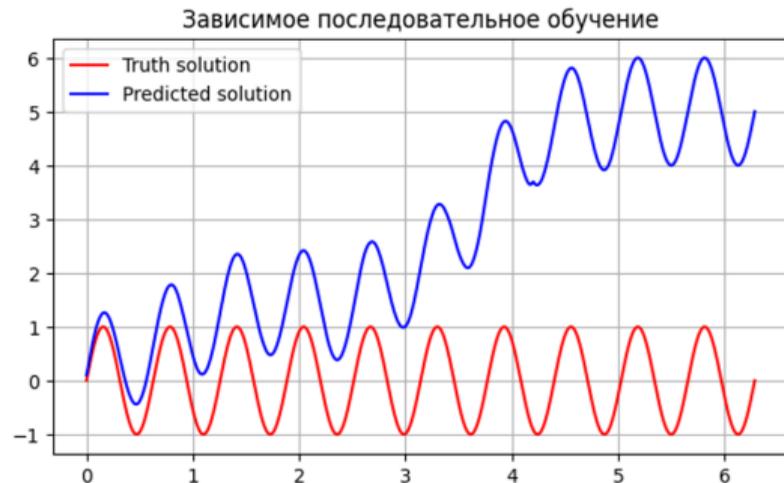
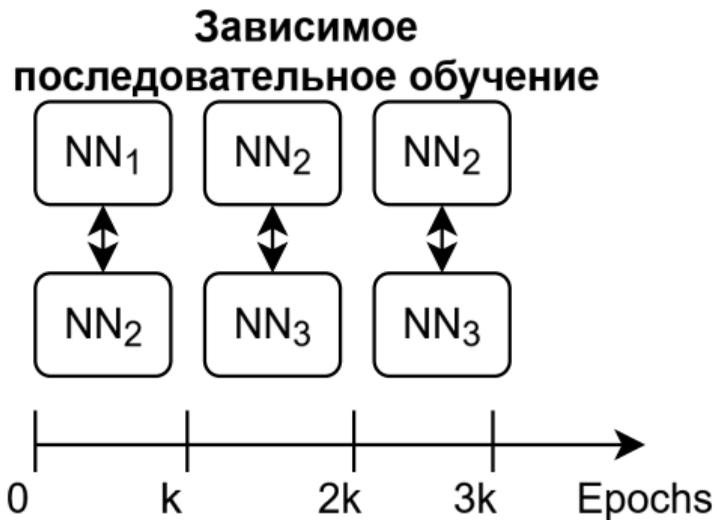
Независимое одновременное обучение



Независимое одновременное обучение

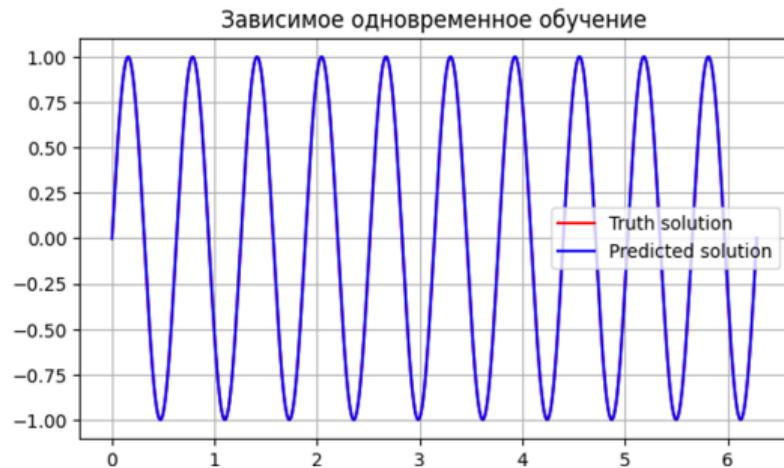
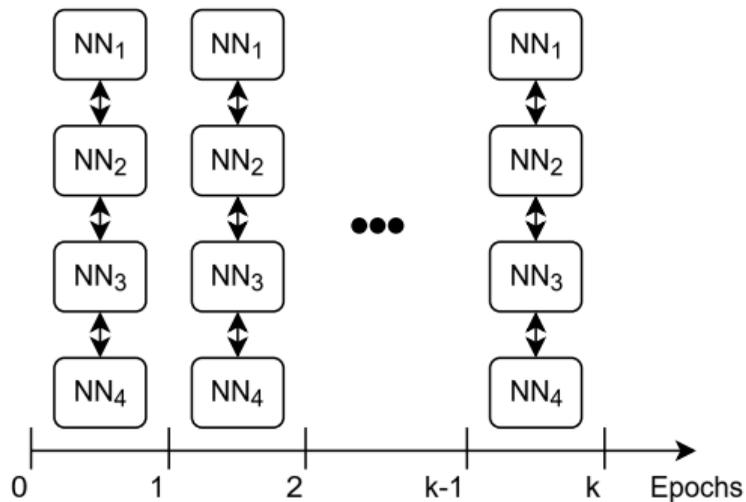


Зависимое последовательное обучение



Зависимое одновременное обучение

Зависимое одновременное обучение



Сравнение стратегий обучения FBPINN

Уравнения:

① $LF_ODE_1: u' = 10 * \cos(10x), u(0) = 0, x \in [0, 2\pi]$

② $LF_ODE_2: u' = 2x, y(0) = 0, x \in [0, 1]$

③ $NLF_ODE_1: u' + \frac{y-2x}{x+0.1} = 0, y(0) = 2, x \in [0, 1]$

④ $LH_PDE_1: u_{tt} = 4u_{xx}, u(0, x) = \sin(\pi * x) + \frac{1}{2}\sin(4\pi * x), u_t(0, x) = 0, u(t, 0) = u(t, 1) = 0, x \in [0, 1]$

⑤ $LH_PDE_2: u_t = 0.1 * u_{xx}, u(t, 0) = u(t, 1) = 0, u(0, x) = \sin(\pi * x), x \in [0, 1]$

Значение MSE на валидационных данных

Уравнение	Независимое обучение		Зависимое обучение	
	Последовательное	Одновременное	Последовательное	Одновременное
LF_ODE_1	0.874	0.608	10.7	1e-6
LF_ODE_2	0.037	0.064	1e-6	4e-7
NLF_ODE_1	0.231	0.187	0.146	5e-4
LH_PDE_1	0.624	0.625	0.713	0.131
LH_PDE_2	0.030	0.031	0.183	0.002

Количество эпох (тыс.)

Уравнение	Независимое обучение		Зависимое обучение	
	Последовательное	Одновременное	Последовательное	Одновременное
LF_ODE_1	100	100	210	100
LF_ODE_2	100	100	100	100
NLF_ODE_1	100	100	100	100
LH_PDE_1	180	180	150	180
LH_PDE_2	180	180	60	60

Время обучения (ч)

Уравнение	Независимое обучение		Зависимое обучение	
	Последовательное	Одновременное	Последовательное	Одновременное
LF_ODE_1	0.75	0.92	0.3	0.66
LF_ODE_3	0.13	0.28	0.04	0.05
NLF_ODE_1	0.10	0.3	0.04	0.05
LH_PDE_1	17	9	9.7	32
LH_PDE_2	0.95	1.9	0.75	1.5

Рекомендации использования FBPINN

- Последовательные стратегии требуют аккуратного выбора порядка обучения подмоделей
- Следует использовать предобучение на граничных и начальных условиях
- При наличии данных наблюдений их стоит добавлять в процесс обучения
- При доступности больших вычислительных ресурсов или небольших задачах лучше использовать зависимую одновременную стратегию обучения
- В случае большого размера подмоделей или их числа стоит проводить вычисления на GPU либо использовать зависимую последовательную стратегию обучения

Заключение

- Реализована архитектура FBPINN
 - ▶ Поддержка CPU/GPU
 - ▶ Гибкий API для стратегий обучения
 - ▶ Интеграция с TensorFlow
- Проведен сравнительный анализ 4 стратегий обучения и даны рекомендации по использованию
- Экспериментально показано, что зависимые стратегии превосходят по точности предсказания независимые на несколько порядков



[https://github.com/Krekep/
degann/tree/fbpinn_dev](https://github.com/Krekep/degann/tree/fbpinn_dev)

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (id проекта 128783603)

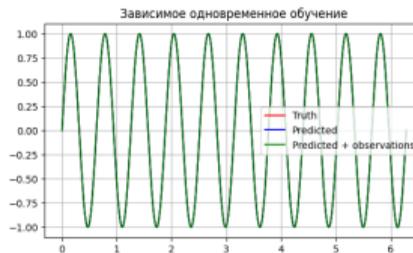
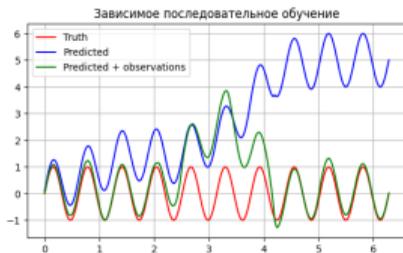
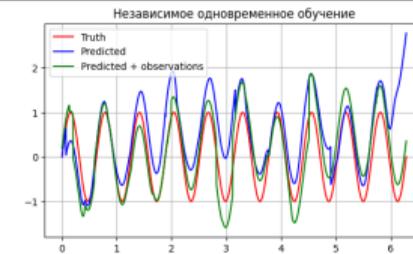
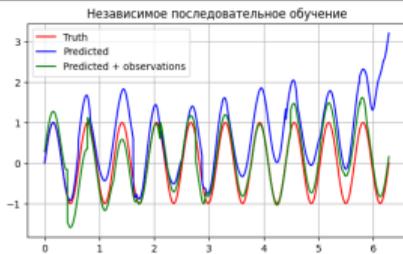


pavel.alimov@spbu.ru

Приложение 1. Аппроксимация LF_ODE_1 с учётом наблюдений

Метрики для моделей обученных на уравнении с наблюдениями

Метрика	Независимое обучение		Зависимое обучение	
	Последовательное	Одновременное	Последовательное	Одновременное
MSE	0.112	0.188	1.117	2e-6
Кол-во эпох (тыс.)	100	100	210	50
Время обучения (ч)	0.8	1	0.3	0.3



Приложение 2. Предобучение граничным условиям на LH_PDE_2

Метрики для зависимой одновременной стратегии обучения

Метрика	С предобучением	Без предобучения
MSE	0.002	0.057
Кол-во эпох (тыс.)	60	59

