

Нейросетевое моделирование оптических солитонов,
описываемых обобщённым нелинейным уравнением
Шредингера шестого порядка с высокой
нелинейностью

Молошников Иван, Кувакин М., Сбоев А.Г.

DLCP, Июнь 2025

Цель работы - исследовать PINNs для сложной задачи

Цель

Применить физически обоснованные нейронные сети (PINNs) для решения **сложной** краевой задачи с уравнением **6-го** порядка с нелинейностью **7-ой** степени. В задаче используется обобщённое нелинейное уравнение Шрёдингера (ОНУШ) для моделирования распространения оптического солитона в сильно нелинейной среде.

Задачи:

- ▶ Валидация на известном точном решении:
 - ▶ Подбор гиперпараметров на упрощённой задаче 2-го порядка;
 - ▶ Перенос параметров на целевую задачу 6-го порядка;
- ▶ Численное решение задачи 6-го порядка для 2-х и 3-х солитонов;

Краевая задача

$$iq_t + \sum_{k=1}^N a_k q_{kx} + q \sum_{k=1}^M b_k |q|^{2k} = 0,$$

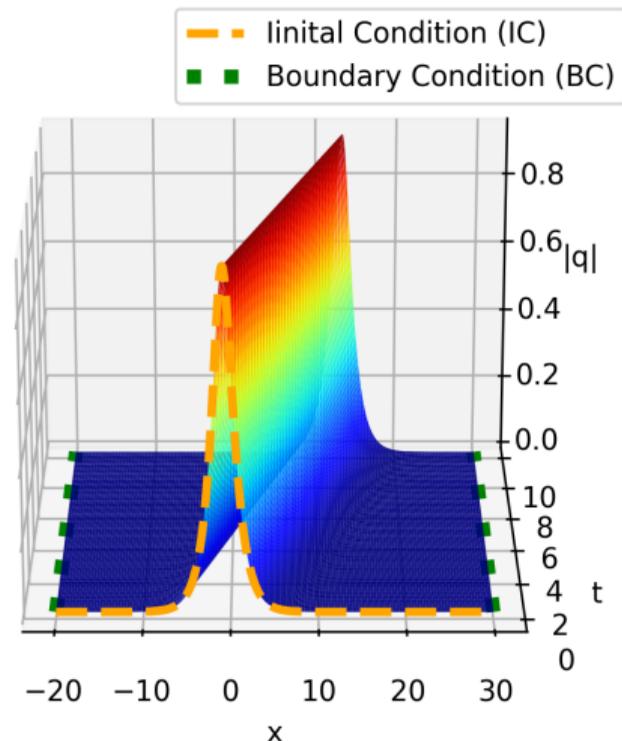
$$q(x, t = 0) = q_{ic}(x),$$

$$q(x_{BC}, t) = 0,$$

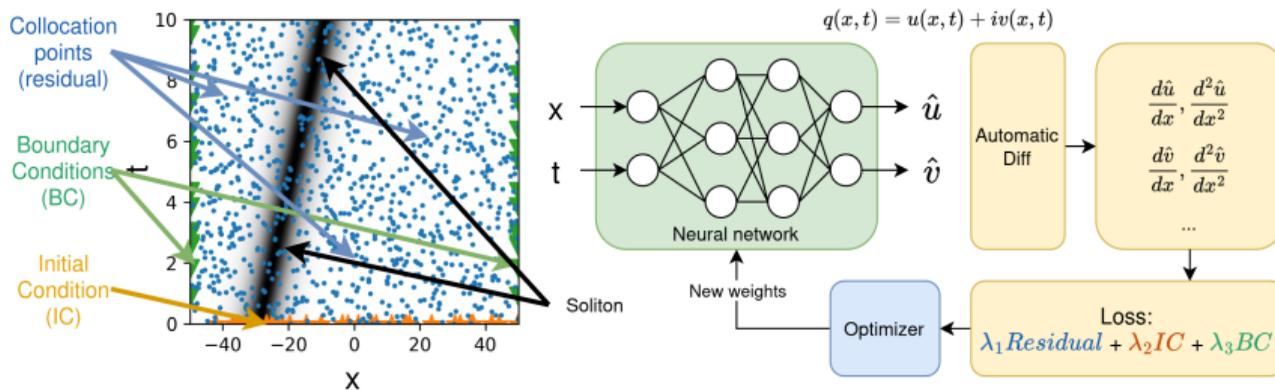
$$q_x(x_{BC}, t) = 0, \dots q_{(N-1)x}(x_{BC}, t) = 0,$$

$$a_k, b_k \in \mathbb{R} \forall k; q_{kx} = \frac{\partial^k q}{\partial x^k}$$

- ▶ VVP2: N=2, M=3 - для подбора гиперпараметров;
- ▶ VVP6: N=6, M=3 - целевая задача;



Physics Informed Neural Network (PINNs)

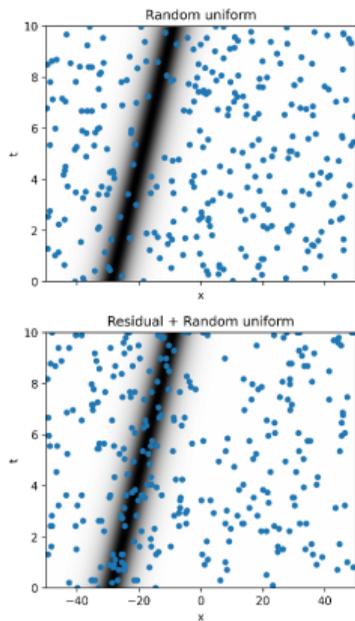


Особенности PINNs:

- ▶ + Непрерывное решение;
- ▶ + Гибкие: учёт нескольких условий, включение наблюдаемых данных, прямая и обратная задачи, диф. операторы;
- ▶ - Вычислительно затратные;
- ▶ - Требуют подбора гиперпараметров;

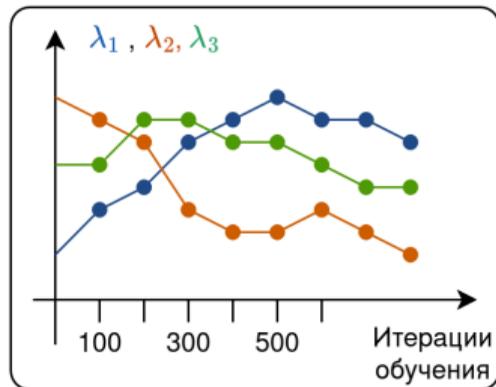
Модификации PINNs

Адаптивный выбор точек коллокаций



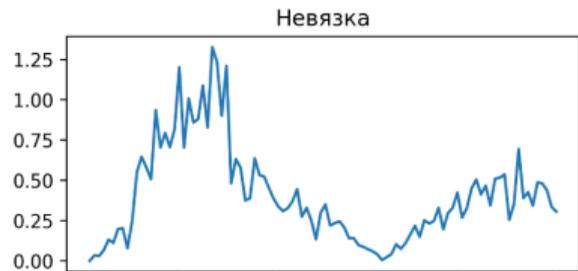
Адаптивные веса в функции потерь

Loss:
 $\lambda_1 Residual + \lambda_2 IC + \lambda_3 BC$

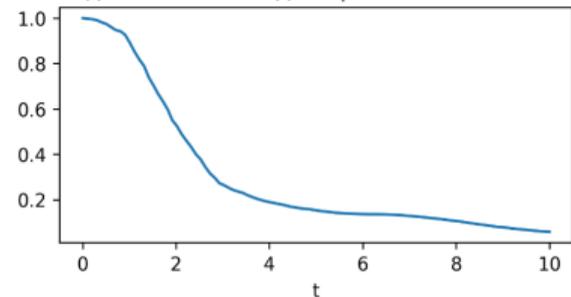


- ReLoBRalo;
- SoftAdapt;

Causal loss



Вес для точек в каждом срезе по t в Causal loss



Относительная ошибка (сравнение с известным решением)

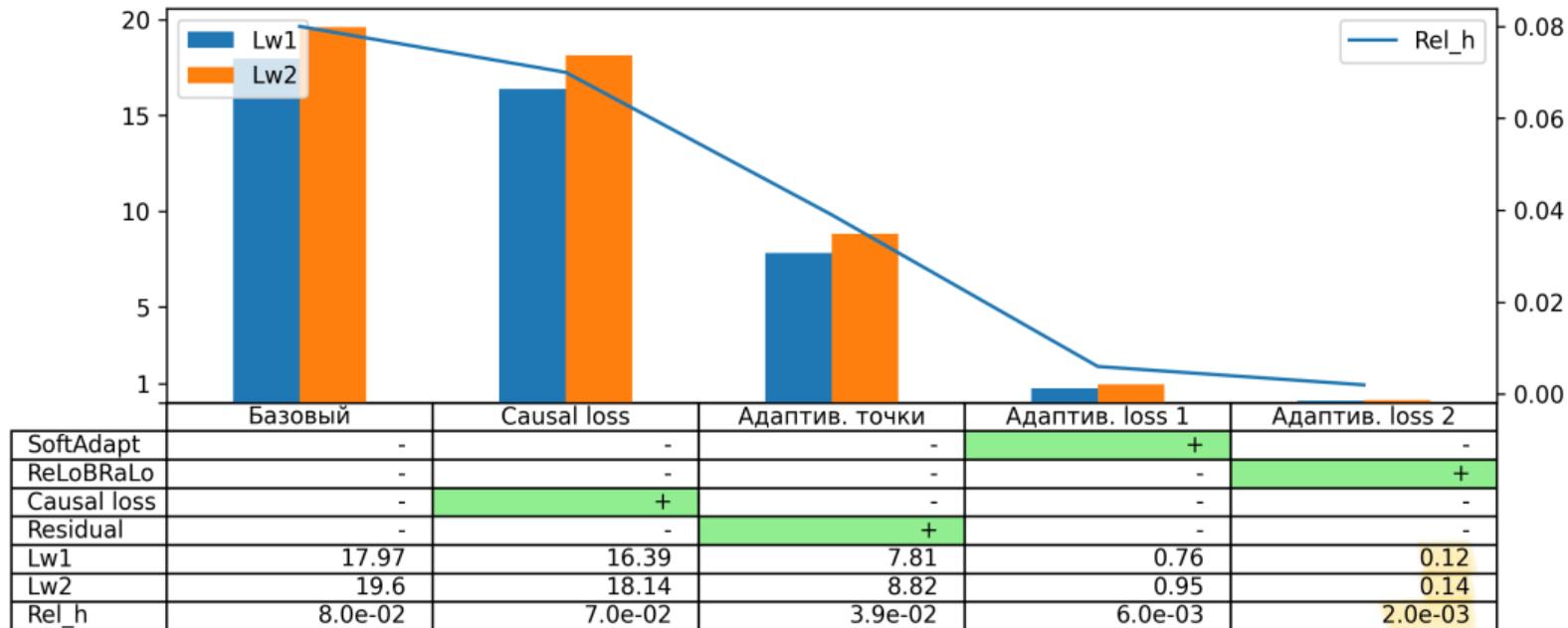
$$Rel_h = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^N (|\hat{q}(x_n, t_n)| - |q(x_n, t_n)|)^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^N |q(x_n, t_n)|^2}}$$

Законы сохранения ОНУШ:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |q(x, t)|^2 dx = \text{const}_1 \quad \forall t, \quad Lw_1 = \max_{t \in [0, T]} \left(\frac{|I_1(t_0) - \hat{I}_1(t)|}{I_1(t_0)} \right) \cdot 100\%,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (q^* q_x - q_x^* q) dx = \text{const}_2 \quad \forall t, \quad Lw_2 = \max_{t \in [0, T]} \left(\frac{|I_2(t_0) - \hat{I}_2(t)|}{I_2(t_0)} \right) \cdot 100\%,$$

Результаты VVP2, 1 солитон



Результаты VVP6, сравнение Базового и модфи. подхода

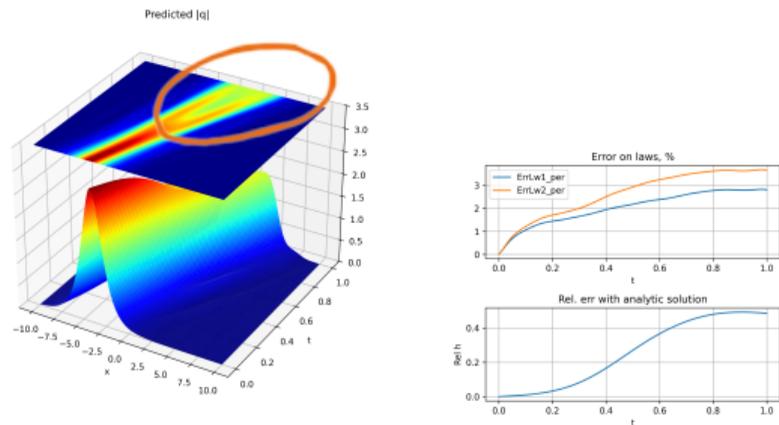


Figure: Базовый PINNs

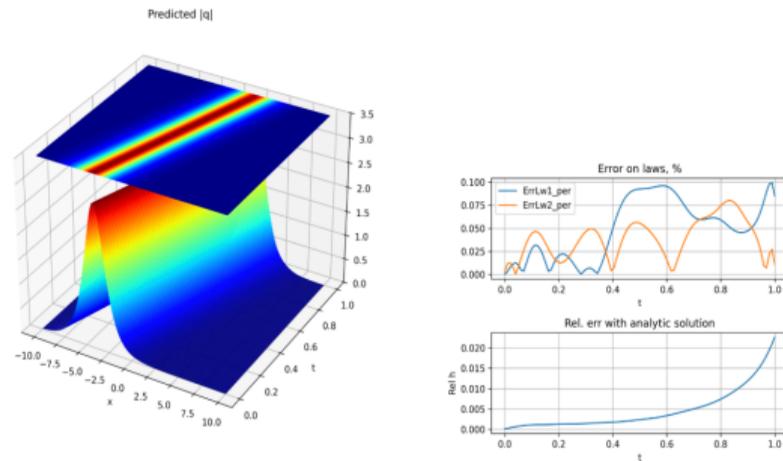
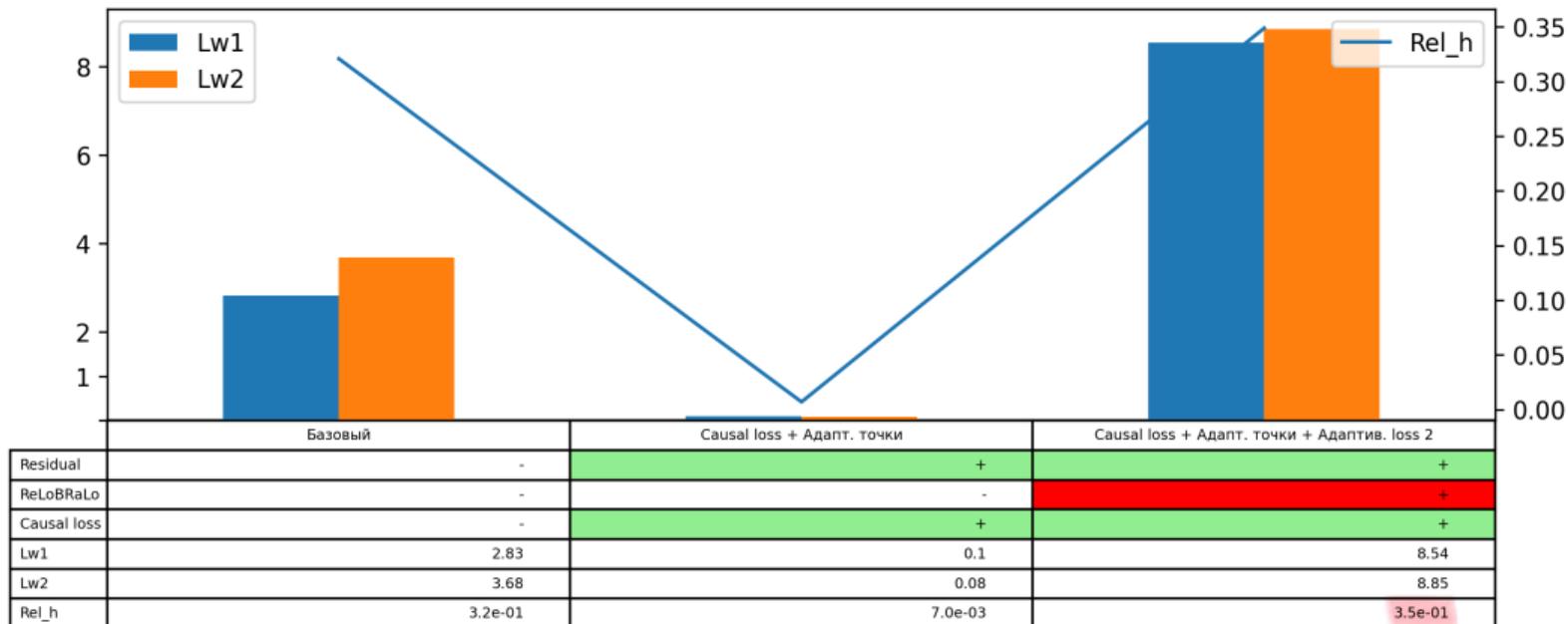
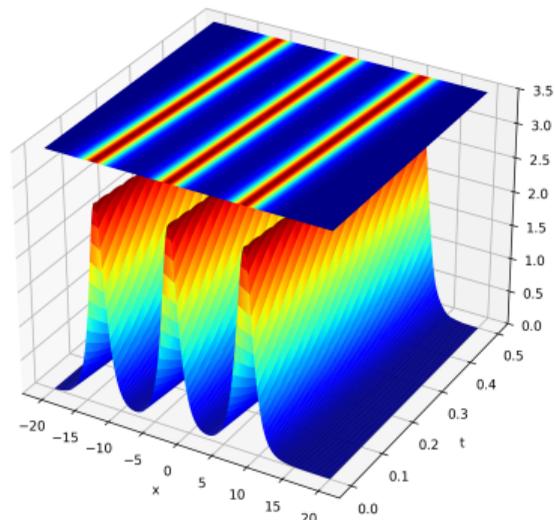
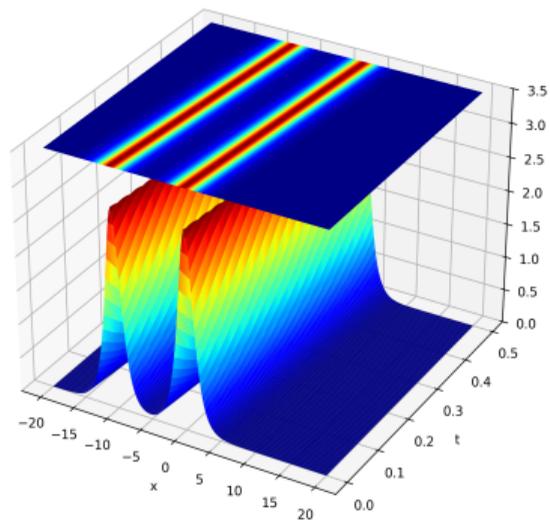


Figure: Модифицированный PINNs
(Causal loss + Адапт. точки)

Результаты VVP6, 1 солитон, перенос гиперпараметров



Результаты ВVP6, 2 и 3 солитона



Задача	Lw_1	Lw_2	Rel_h
1 солитон	0,10	0,08	$6,82 \times 10^{-3}$
2 солитона	0,04	0,03	-
3 солитона	0,07	0,07	-

Проведена валидация метода PINNs и подбор гиперпараметров на задачах 2-го и 6-го порядка с известным аналитическим решением. Получено численное решение для 2-х и 3-х солитонных задач для уравнения 6-го порядка. Такие результаты получились благодаря подбору и переносу хороших гиперпараметров из задачи с 2-м порядком.

Планы по развитию:

- ▶ Сделать задачу 2-го порядка более похожей на 6-ой (область определения, параметры солитона);
- ▶ Автоматический подбор гиперпараметров;
- ▶ Исследование новых модификаций PINNs: PINNsFormer, FBPINNs и т.д.;

Список литературы

1. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations //Journal of Computational physics. – 2019. – Т. 378. – С. 686-707;
2. Kudryashov N. A. Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations //Optik. – 2020. – Т. 206. – С. 163550;
3. Moloshnikov I. A. et al. Analysis of neural network methods for obtaining soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation //Chaos, Solitons & Fractals. – 2025. – Т. 192. – С. 115943;

Благодарности

Работа была выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт», <http://ckp.nrcki.ru/>

Спасибо за внимание!

Вопросы?

Контакты:

ivan-rus@yandex.ru, sag111@mail.ru