1. Описание параметров Хилласа

Параметры Хилласа позволяют «описать» пятно на матрице ФЭУ эллипсом. Их условно можно разделить на три группы:

- те, которые дают информации о форме эллипса: большая полуось эллипса – длина (*Length*), малая полуось – ширина (*Width*);
- те, которые определяют местоположение и ориентацию эллипса относительно центра камеры, где должен находиться источник: центр тяжести эллипса (<x>,<y>), расстояние от центра камеры (*Distance*), ошибка (*Miss*), угол α и угол θ.
- те, которые описывают интенсивность события и характер распределения интенсивности на камере: размер изображения (*Size*), концентрация (*Concentration*), коэффициент асимметрии и коэффициент эксцесса.

Данный набор также может быть дополнен через комбинации вышеперечисленных параметров.

На рис. 1.1 указаны некоторые параметры Хилласа в системе координат камеры телескопа.

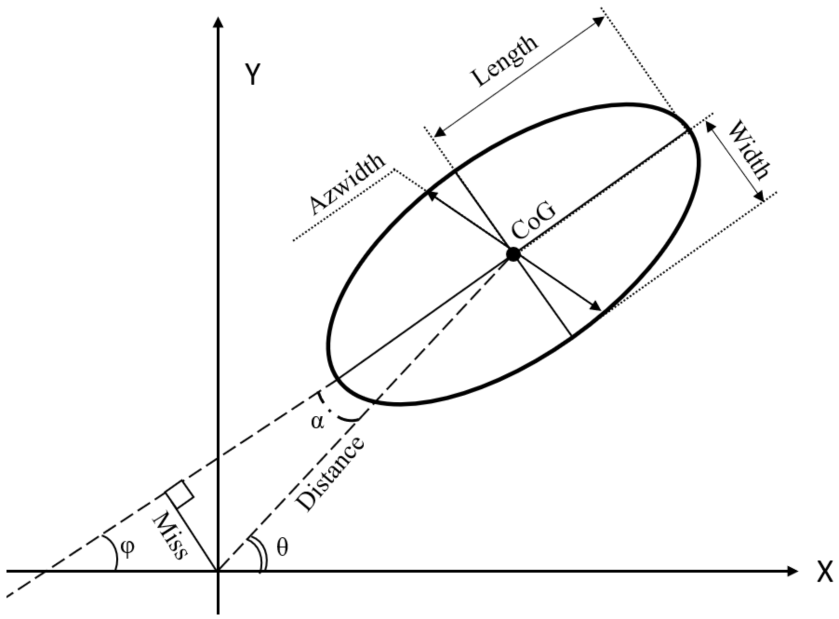

Рис. 1.1. Схема эллиптического изображения от ШАЛ, сформированное на матрице IACT. *CoG* – это центр тяжести эллипса

Центр тяжести эллипса $(< x >, < y >)$ определяется как среднее значение по всем сработавшим ФЭУ с учетом интенсивности света, который они зарегистрировали:

$$< x >= \frac{\sum_i \rho_i x_i}{\sum_i \rho_i}, < y >= \frac{\sum_i \rho_i y_i}{\sum_i \rho_i}, \tag{1.1}$$

где ρ_i – количество фотоэлектронов, зарегистрированных i-м ФЭУ, x_i, y_i– его координаты.

Параметр *distance* является расстоянием между центром эллипса и центром камеры:

$$\text{Distance} = \sqrt{< x >^2 + < y >^2}. \tag{1.2}$$

Стоит отметить, что центр тяжести эллипса также быть точно определен в полярных координатах, где полярный угол равен углу θ, а радиус равен *distance*.

Длина и ширина (*length* и *width*) задают форму описываемого эллипса (большую и малую полуось соответственно) и рассчитываются по следующим формулам:

$$(\mathrm{Length})^2 = \frac{\sigma_{x^2}+\sigma_{y^2}+\sqrt{(\sigma_{y^2}-\sigma_{x^2})^2+4\sigma_{xy}^2}}{2}, \tag{1.3}$$

$$(\mathrm{Width})^2 = \frac{\sigma_{x^2}+\sigma_{y^2}-\sqrt{(\sigma_{y^2}-\sigma_{x^2})^2+4\sigma_{xy}^2}}{2}, \tag{1.4}$$

где σ_{x^2},σ_{y^2} – средние квадратичные отклонения вдоль оси Ох и Оу соответственно, σ_{xy} – смешанное среднее квадратичное отклонение.

Параметр *azwidth* описывает ширину эллипса по направлению в центр камеры. В случае, когда свет от ШАЛ пришел от источника, находящегося в центре камеры, то азимутальная ширина не будет сильно отличаться от ширины (width) эллипса. В противном случае возможна произвольная ориентация эллипса на камере, из-за чего азимутальная ширина может достигать до значений, равных длине (length) эллипса.

Параметр *miss* определяется как расстояние, показывающее отклонение направления большой полуоси эллипса от центра камеры, т.е. «промах» в регистрации ШАЛ от источника, находящего в центре камеры.

Что касается угловых параметров, то угол φ определяется как угол между положительным направлением оси Ох и длиной эллипса, а угол α связан, как и параметр *miss*, с отклонением большой полуоси эллипса от центра камеры. Определяется он следующим образом:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\mathrm{miss}}{\mathrm{distance}}\right). \tag{1.5}$$

Рассмотрим теперь параметры третьей группы. Параметр *size* – это общее количество фотоэлектронов, зарегистрированных ФЭУ:

$$\mathrm{Size} = \sum_i \rho_i. \tag{1.6}$$

Параметр *концентрации* (*concentratio*n, или *conc*, или *conc2*) определяется как отношение числа фотоэлектронов с двух самых «ярких» ФЭУ к их общему количеству. По сути, концентрация показывает, как плотно сосредоточено черенковское излучение у оси ШАЛ. В это же время *коэффициент асимметрии* указывает на смещение пика распределения амплитуд от центра тяжести вдоль рассматриваемой полуоси эллипса, *эксцесс* – меру остроты пика.

2. Вывод основных параметров Хилласа

Основные параметры Хилласа получаются из метода главных компонент. Данный метод является одним из способов уменьшения размерности данных, т.е. числа независимых параметров, описывающих эти данные, путем поиска скрытых взаимосвязей между ними и исключения каким-либо преобразованием этих взаимосвязей и избыточности размерности при минимальной потере количества информации.

Согласно этому методу рассматривается ковариационная матрица первоначальных данных. В случае данных изображений с камеры телескопов IACT – это будет матрица с размерностью 2x2:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \sigma_{x^2} & \sigma_{\text{xy}} \\ \sigma_{\text{xy}} & \sigma_{y^2} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где σ_{x^2}, σ_{y^2} – средние квадратичные отклонения вдоль оси Ox и Oy соответственно, σ_{xy} – смешанное среднее квадратичное отклонение. Рассчитываются квадратичные отклонения следующим образом:

$$\sigma_{x^2} = <x^2> - <x>^2 \ , \tag{2.2}$$

$$\sigma_{y^2} = <y^2> - <y>^2 \ , \tag{2.3}$$

$$\sigma_{\text{xy}} = <xy> - <x><y>, \tag{2.4}$$

$$<x> = \frac{\sum_i \rho_i x_i}{\sum_i \rho_i}, <x^2> = \frac{\sum_i \rho_i x_i^2}{\sum_i \rho_i}, \tag{2.5}$$

$$<y> = \frac{\sum_i \rho_i y_i}{\sum_i \rho_i}, <y^2> = \frac{\sum_i \rho_i y_i^2}{\sum_i \rho_i}, \tag{2.6}$$

$$<\text{xy}> = \frac{\sum_i \rho_i x_i y_i}{\sum_i \rho_i} \tag{2.7}$$

где ρ_i – количество фотоэлектронов, зарегистрированных i-м ФЭУ, x_i, y_i – его координаты.

Поскольку в ковариационной матрице (1.1) на главной оси всегда будут стоять значения, равные или больше нуля, то она может быть диагонализирована в силу своей симметрии, а также можно найти собственные функции. Для расчета собственных значений λ (данные значения стоят на главной оси диагонализированной матрицы), необходимо решить характеристическое уравнение, являющимся квадратичным относительно λ: $\det(\hat{C} - \lambda \cdot \hat{I}) = 0$, где $\hat{I}$ – единичная матрица 2x2. Через простые алгебраические преобразования получим:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma_{x^2} + \sigma_{y^2} \pm \sqrt{(\sigma_{y^2} - \sigma_{x^2})^2 + 4\sigma_{xy}^2}}{2}. \tag{2.8}$$

Введем обозначения:

$$d = \sigma_{y^2} - \sigma_{x^2}; \tag{2.9}$$

$$z = \sqrt{d^2 + 4\sigma_{xy}^2}. \tag{2.10}$$

Поскольку $z \geq 0$, то $\lambda_1 > \lambda_2$, то, с учетом сохранения размерности длины, получим два параметра Хилласа – большую и малую полуось эллипса:

$$\text{Length} = \sqrt{\frac{\sigma_{x^2} + \sigma_{y^2} + z}{2}}, \tag{2.11}$$

$$Width = \sqrt{\frac{\sigma_{x^2}+\sigma_{y^2}-z}{2}}. \qquad (2.12)$$

Таким образом, через собственные значения можно найти собственные вектора ковариационной матрицы, которые будут указывать на ориентацию эллипса. Они необходимы для нахождения угла θ и коэффициента асимметрии.

Для этого необходимо решить однородную систему уравнений, подставляя сначала значение λ_1 (собственный вектор данного значения – $\vec{v}_1$), а потом λ_2 (собственный вектор – $\vec{v}_2$):

$$(\hat{C} - \lambda_{1,2} \cdot \hat{I}) \cdot \vec{v}_{1,2} = \vec{0}. \qquad (2.13)$$

Таким образом, собственные вектора:

$$\vec{v}_1 = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2\sigma_{\text{xy}} \\ d+z \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = c_2 \cdot \begin{pmatrix} 2\sigma_{\text{xy}} \\ d-z \end{pmatrix}, \qquad (2.14)$$

где $c_{1,2}$ – нормировочные константы: $c_{1,2} = (2z(z \pm d))^{-1/2}$. Вектор $\vec{v}_1$ будет лежать на большой полуоси эллипса (рис. 13). Значит, угол φ можно определить как арктангенс отношения y-компоненты вектора $\vec{v}_1$ на x-компоненту этого вектора:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{d+z}{2\sigma_{xy}}\right) \qquad (2.15)$$

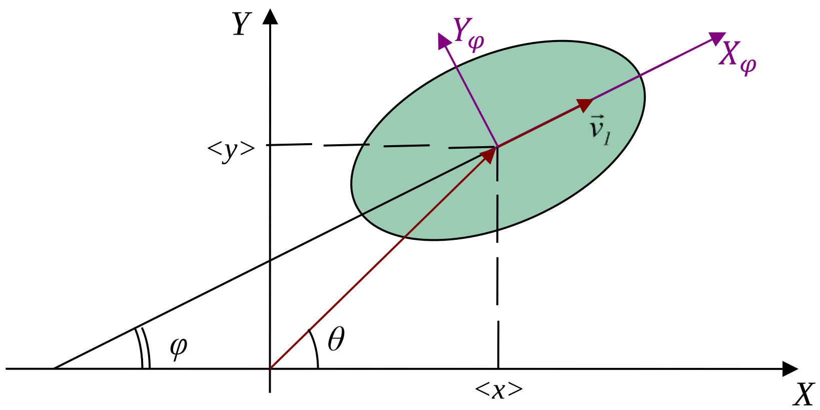

Рис. 2.1. Иллюстрация к выводу коэффициента симметрии

Однако необходимо учитывать, чтобы направление вектора $\vec{v}_1$ должно иметь направление из центра камеры во избежание неопределенности знака асимметрии, так как он зависит от относительного направления $\vec{v}_1$ и оси Ox.

Из полученного значения угла, переходя в новую систему координат $OX_\varphi Y_\varphi$:

$$x_{\varphi,\text{i}} = (x_i - < x >) \cos\varphi + (y_i - < y >) \sin\varphi, \qquad (2.16)$$

где $x_{\varphi,\text{i}}$ – координаты ФЭУ в системе $OX_\varphi Y_\varphi$, можно рассчитать коэффициент асимметрии и эксцесса вдоль оси Ox_φ:

$$Skewness = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}, \qquad (2.17)$$

$$Kurtosis = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3, \qquad (2.18)$$

где μ_4, μ_3, μ_2 – четвертый, третий и второй центральный момент соответственно:

$$\mu_k = \frac{\sum_i \rho_i (x_{\varphi,\text{i}} - <x_\varphi>)^k}{\sum_i \rho_i} \qquad (2.19)$$

Приведенные формулы справедливы для расчета коэффициента асимметрии и эксцесса вдоль большой полуоси. Для расчета коэффициента вдоль малой полуоси центральные моменты рассчитываются уже для $y_{\varphi,i}$ в системе $OX_{\varphi}Y_{\varphi}$:

$$y_{\varphi,\mathrm{i}} =-(x_i-< x >)\, sin\,\varphi + (y_i-< y >)\, cos\,\varphi \qquad (2.20)$$

Вычисление параметра *azwidth* имеет аналогичную идею расчета: систему координат необходимо сместить и повернуть на полярный угол φ так, чтобы ось Ox проходила через центр тяжести эллипса и центр старой системы координат OXY, и в новых координатах рассчитать нужный параметр. Угол θ определяется следующим образом:

$$\sin\theta = \frac{<y>}{dis\,tan\,ce}, cos\,\theta = \frac{<x>}{dis\,tan\,ce}. \qquad (2.21)$$

Параметр *distance* определяется как расстояние между центром камеры и центром тяжести эллипса (1.2). Таким образом, в системе координат $OX_{\theta}Y_{\theta}$ азимутальная ширина будет определяться как среднее квадратичное отклонение вдоль оси Oy_{θ}:

$$(Azwidth)^2 =< y_{\theta}^2 > -< y_{\theta} >^2. \qquad (2.22)$$

Параметр Miss легко найти из геометрических соображений. Параметризовав большую полуось прямой $y = \mathrm{a}x + b$, где $a = \mathrm{tg}\varphi = \frac{d+z}{2\sigma_{\mathrm{xy}}}$, а $b =< y > -a < x >$, легко получить параметр *Miss:*

$$Miss = |b \cdot cos\theta| = \left|\frac{< y > -a < x >}{\sqrt{1+a^2}}\right|. \qquad (2.23)$$

Формула для вывода угла α представлена в (1.5)